TD 15 : Convexité

Exercice 1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto |x|$.

Exercice 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction affine. Montrer que $f+g$ est convexe.

Exercice 3. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Donner un contre-exemple si on omet l'hypothèse « g est croissante ».

Exercice 4 (*Inégalités de convexité*)**.** Les questions suivantes sont indépendantes :

1) Montrer que $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1,+\infty[$. En déduire :

$$\forall a,b > 1 \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

2) Montrer que $x \mapsto -\ln x$ est convexe. En déduire :

$$\forall x_1,\ldots,x_n > 0 \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

3) Démontrer : $\forall x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+^* \qquad \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

Exercice 5. En utilisant un argument de convexité, montrer que

$$\forall x > 0 \qquad \ln x \leq x-1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Montrer que si f admet un minimum local en a, alors ce minimum est global.
2) Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.